Е. В. Патрин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
evgeniipatrin@mail.ru

ИДЕАЛЫ C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЁННОЙ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

Исследуются некоторые идеалы C^*-алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, предложенной в работе [2], порождённой алгеброй мультипликаторов на гильбертовом пространстве $l_2(X)$, где X – счётное множество, и не более чем счётным семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, определяемых заданным отображением $\varphi : X \longrightarrow X$.

Предполагаем, что у φ отсутствуют *циклические* элементы, т. е. такие $x \in X$, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $\varphi^k(x) = x$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\varphi^{-k}[x] := \big\{y \in X : \varphi^k(y) = x\big\}$ полный прообраз элемента $x \in X$ степени k. Очевидно, что если $x_1 \neq x_2$, то $\varphi^{-k}[x_1] \cap \varphi^{-k}[x_1] = \varnothing$.

Также предполагаем, что для любого $x \in X$ $\operatorname{card}(\varphi^{-1}[x]) < \infty$.

Рассмотрим гильбертово пространство $l_2(X)$ с естественным базисом $\{\delta_x\}_{x\in X}$, где $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$ – символ Кронекера. Отображение φ индуцирует замкнутый оператор

$$T_\varphi : l_2(X) \longrightarrow l_2(X); \quad T_\varphi(f) = f \circ \varphi,$$

с которым связано семейство операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m + \cdots .$$

Заметим, что проекторы на начальные и конечные подпространства операторов U_k удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k\circ U_k^* = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} Q_k = Q_\varphi, \\ \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k^*\circ U_k = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} P_k = P_\varphi, \end{cases}$$

где Q_φ и P_φ – проекторы, определенные заданным отображением φ (см. [1]).

Каждая функция f из $l_\infty(X)$ порождает мультипликатор:

$$M_f : l_2(X) \longrightarrow l_2(X), \quad M_f(g) = fg,$$

с очевидным свойством: $(M_f)^* = M_{\overline{f}}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ C^*-подалгебру $B(l_2(X))$, порожденную всеми мультипликаторами и операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Эта алгебра является ядерной $\mathbb{Z}$-градуированной C^*-алгеброй (см. [2]).

Теорема. *Если граф $(X, \varphi(X))$ связный, то $\mathfrak{M}_\varphi$ неприводима на $l_2(X)$.*

Следствие. *Если граф $(X, \varphi(X))$ связный, то $\mathfrak{M}_\varphi$ содержит идеал компактных операторов $K(l_2(X))$.*

Обозначим $\mathcal{E}_x = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} \varphi^{-k}(x)$. Пусть $\mathcal{P}_x$ – проектор на подпространство $\mathcal{H}_x$ пространства $l_2(X)$ с базисом $\{\delta_y : y \in \mathcal{E}_x\}$. Очевидно, что $\mathcal{P}_x \in \mathfrak{M}_\varphi$ для любого x, поскольку $l_\infty(X)$ содержит индикатор множества $\mathcal{E}_x$.

Заданное на множестве X отображение индуцирует частичный порядок на этом множестве, $x \prec y$ если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$.

Лемма. *C^*-подалгебра $\mathcal{I}_x$ алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, порожденная элементами вида $\mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi \cup \mathfrak{M}_\varphi\mathcal{P}_x$, является собственным идеалом в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$.*

Теорема. *Если x_1 и x_2 не сравнимы, то соответствующие идеалы $\mathcal{I}_{x_2}$ и $\mathcal{I}_{x_1}$ различны. Если $x_1 \prec x_2$, то $\mathcal{I}_{x_2} \subseteq \mathcal{I}_{x_1}$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кузнецова А. Ю. *Об одном классе C^*-алгебр, порождённых счётным семейством частичных изометрий* // Изв. НАН Армении. Матем. – 2010. – Т. 45 (6). – С. 51–62.

2. Кузнецова А. Ю., Патрин Е. В. *Об одном классе C^*-алгебр, порождённых частичными изометриями и мультипликаторами* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – Т. 56 (6). – С. 44–55.

К. А. Петухова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, ksenypet@mail.ru

ОБ АНАЛОГЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИДЕАЛОВ ДЕДЕКИНДОВЫХ КОЛЕЦ

В работе [1] был предложен аналог криптографического алгоритма RSA, в котором вместо натуральных чисел используются идеалы дедекиндовых колец. Одно из условий, которое необходимо наложить на дедекиндово кольцо R, – требование, чтобы для каждого максимального идеала $\mathfrak{M}$ поле $R/\mathfrak{M}$ было конечным (в дальнейшем это условие будет всюду подразумеваться). Тогда можно определить аналог функции Эйлера, который играет существенную роль в алгоритме RSA из [1], по формуле $\varphi_R(\mathfrak{A}) = |\mathrm{U(R/\mathfrak{A})}|$, где $\mathfrak{A}$ – произвольный идеал R, U означает группу обратимых элементов кольца R.

В данной заметке приводится более подробная информация об этой функции. Из формулы (5) на с. 13 книги [2] следует